УДК 512.662.1

М. В. Ладошкин

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА КОМПЛЕКСЕ ХОХШИЛЬДА ДЛЯ СИМПЛИЦИАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. В последнее время в алгебраической топологии актуальным является процесс создания аналогов алгебраических структур, которые были бы устойчивы при переходе к гомотопическому случаю. Ранее автором был построен гомотопически устойчивый аналог симплициального объекта. Для данного объекта доказана теорема существования, причем доказательство теоремы конструктивно, был проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами В. Смирнова. Следующим шагом в исследовании гомотопически устойчивых аналогов является построение комплекса Хохшильда и исследование дополнительных операций на этом комплексе.

Материалы и методы. Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, т.е. над Z_2. Данная техника часто используется в алгебраической топологии ввиду упрощения вычислений и уменьшения громоздкости конструкций. Кроме того, в большинстве случаев результаты, полученные для поля характеристики 2, верны и для случая произвольного поля.

Результаты. Описано основное множество комплекса Хохшильда, дано определение дифференциала, доказывается выполнение условия $d^2 = 0$. На комплексе Хохшильда вводятся дополнительные операции, исследованы их свойства и связь с дифференциалом.

Выводы. Введенные на комплексе Хохшильда для симплициального множества дополнительные конструкции позволят использовать комплекс для описания возможности нетривиального продолжения симплициального множества до гомотопически устойчиво аналога.

Ключевые слова: симплициальный объект, гомологии, гомотопическая устойчивость, комплекс Хохшильда, высшие симплициальные операторы.

M. V. Ladoshkin

ADDITIONAL OPERATIONS ON THE HOCHSCHILD COMPLEX FOR A SIMPLICIAL SET

Abstract.

Background. The process of creating analogues of algebraic structures, which are sustained during the transition to the homotopy case, has recently been a topical one in algebraic topology. Earlier, the author built a stable homotopy analogue of a simplicial object. For this object the researcher proved the existence theorem, and the proof of the theorem is constructive, as well as comparatively analyzed the obtained results with V. Smirnov's results. The next step in the study of analogues with stable homotopy is construction of the Hochschild complex and investigation of additional operations at the complex.

[1] Работа выполнена в рамках гранта на проведение научно-исследовательских работ по приоритетным направлениям научной деятельности вузов-партнеров по сетевому взаимодействию (ФГБОУ ВПО «ЧГПУ» и МордГПИ) по теме «Математическое моделирование поверхностных волн в средах, взаимодействующих с магнитным и электрическим полями».

Materials and methods. All major approvals, the design and proof of theorems are presented over a field of characteristic 2, i.e. over Z_2. This technique is often used in algebraic topology due to simplicity of calculations and reduced complexity of designs. In addition, in most cases, the results, obtained for fields of characteristic 2, are true for the case of arbitrary fields as well.

Results. The article describes a basic set of the Hochschild complex, defines the differential, proves fulfilment of the $d^2 = 0$ condition. The work also considers additional operations, introduced on the Hochschild complex, studies their properties and relationships with the differential.

Conclusions. Additional structures, introduced on the Hochschild complex for simplicial sets, will allow to use the complex to describe a possibility of non-trivial continuation of a simplicial set to an analogue with stable homotopy.

Key words: simplicial object, homology, homotopic stability, Hochschild complex, higher simplicial operators.

Введение

В последнее время в алгебраической топологии актуальным является процесс создания аналогов алгебраических структур, которые были бы устойчивы при переходе к гомотопическому случаю. Первые работы в этом направлении относятся к концу прошлого века (Дж. Мэй, Т. Кадеишвили, В. Смирнов) и касались построения аналога градуированных и дифференциальных алгебр [1].

В работе [2] автором построен гомотопически устойчивый аналог симплициального объекта. Для данного объекта доказана теорема существования, причем доказательство теоремы конструктивно. В этой же работе проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами В. Смирнова, полученными в [3].

В представленной работе строится комплекс Хохшильда для симплициального объекта по аналогии с работами [4, 5]. Определяется основное множество комплекса Хохшильда, определяется дифференциал, доказывается выполнение условия $ds_i = s_i d$. На комплексе Хохшильда вводятся дополнительные операции, которые позволяют использовать комплекс для описания возможности нетривиального продолжения симплициального множества до гомотопически устойчиво аналога.

Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, т.е. над $\mathbf{Z}_2$. Подобный прием является часто используемым в алгебраической топологии, так как позволяет избежать постоянной записи знаков, а также проверки их совпадения. Однако большинство утверждений, верных для случая поля характеристики 2, остаются верными и для произвольного случая.

1. Построение комплекса Хохшильда для симплициального объекта

Сначала напомним основное определение симплициального множества, следуя [6].

Определение 1. Симплициальное множество K – упорядоченный набор множеств, индексированный неотрицательными целыми числами, рассматриваемый вместе с отображениями $\partial_i : K_q \to K_{q-1}$ и $s_i : K_q \to K_{q+1}$, $0 < i \le q$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{(i) } \partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \text{ если } i < j,$$

$$\text{(ii) } s_i s_j = s_{j+1} s_i \text{ если } i < j,$$

$$\text{(iii) } \partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \text{ если } i < j, \quad (1)$$

$$\partial_j s_j = id = \partial_{j+1} s_j,$$

$$\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \text{ если } i > j+1.$$

Элементы K_q будем называть q-симплексом или симплексом размерности q. Отображения ∂_i и s_j называют соответственно операторами граней и вырождений.

Приступим к описанию комплекса Хохшильда для симплициального множества. Все основные утверждения, конструкции и доказательства теорем приводятся над полем характеристики 2, т.е. над $\mathbf{Z_2}$.

Рассмотрим цепной комплекс X, т.е. модуль $X = \oplus X_i$, где каждый X_i – модуль, снабженный последовательностью отображений $d_i : X_i \to X_{i-1}$, называемых дифференциалами, удовлетворяющих условию

$$d_i(d_{i+1}) = 0 .$$

Пусть на этом цепном комплексе задана структура симплициального множества в смысле определения 1, согласованная с дифференциалом, т.е. все отображения граней и вырождений являются цепными

$$d\partial_i = \partial_i d,$$

$$ds_i = s_i d.$$

Градуировка, возникающая из определения симплициального множества, не связана с градуировкой цепного комплекса. Рассмотрим множество $Hom(X, X)$ всех отображений цепного комплекса X в себя.

Определение 2. Будем обозначать $CS(X)$ подмножество множества $Hom(X, X)$, образованное всеми отображениями, которые можно индексировать двумя упорядоченными наборами целочисленных индексов, т.е.

$$CS(X) = \{ f \in Hom(X, X) \text{такие, что } f = f^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_t} : X^m \to X^{m-t+k},$$

где i_s, j_r – целые числа, $m = \max(t, i_t)$, $i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_t$; $j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_k \}$.

Градуировка комплекса X в определении 2 берется «верхняя», т.е. из структуры симплициального множества.

Рассматривая определение 2, можно сказать, что мы выделяем из множества $Hom(X, X)$ счетные подмножества или конечные подмножества, имеющие возможность двойной индексации целыми числами. Выбор способа индексации произволен, и подобная индексация используется исключительно для удобства работы с элементами множества $CS(X)$. Таким образом, единственное ограничение, накладываемое определением 2 на подмножества множества $Hom(X, X)$, – мощность данного подмножества.

Определение 3. Будем обозначать $CS^*(X)$ множество всех возможных подмножеств $CS(X)$, каждое из которых имеет свою индексацию целыми числами.

Таким образом, мы будем рассматривать множество подмножеств множества $Hom(X,X)$, имеющее счетную мощность. Построим отображение, которое будет соответствовать дифференциалу в комплексе Хохшильда.

Определение 4. Определим отображение $\delta: CS^*(X) \to CS^*(X)$ следующей формулой:

$$\delta f(x) = \sum(\partial_0 + \partial_1 + \ldots + \partial_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}(x) + (s_0 + s_1 + \ldots + s_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}(x), \quad (2)$$

где суммирование идет по всем возможным наборам индексов (и, соответственно, отображениям $f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}(x)$), удовлетворяющих условию $t+k=m$.

Следующее утверждение показывает, что отображение δ из определения 4 является аналогом дифференциала в стандартном комплексе Хохшильда для алгебр или модулей над алгебрами.

Теорема 1. Отображение δ из определения 4 удовлетворяют условию

$$\delta\delta = 0,$$

т.е. является дифференциалом.

Доказательство. Пусть $x \in X^m$, $f \in CS^*(X)$.

Применяя формулу (2), имеем

$$\delta(\delta f(x)) = \delta(\sum(\partial_0 + \partial_1 + \ldots + \partial_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}(x) + (s_0 + s_1 + \ldots + s_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}(x)).$$

В скобках в последнем выражении стоят отображения $f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}(x)$ из $f \in CS^*(X)$, заданные на различных симплициальных «этажах» комплекса X. Рассмотрим действие дифференциала на первое слагаемое в скобках. Получим, используя формулу (2):

$$\delta\Big(\sum(\partial_0 + \partial_1 + \ldots + \partial_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}\Big)(x) =$$

$$= \sum(\partial_0 + \partial_1 + \ldots + \partial_{m-1})\Big((\partial_0 + \partial_1 + \ldots + \partial_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}\Big)(x) +$$

$$+ \sum(s_0 + s_1 + \ldots + s_m)\Big((\partial_0 + \partial_1 + \ldots + \partial_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}\Big)(x).$$

Аналогично, для второго слагаемого получаем

$$\delta\Big(\sum(s_0 + s_1 + \ldots + s_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}\Big)(x) =$$

$$= \sum(s_0 + s_1 + \ldots + s_m)\Big((\partial_0 + \partial_1 + \ldots + \partial_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}\Big)(x) +$$

$$+\sum(s_0+s_1+\ldots+s_m)\Big((s_0+s_1+\ldots+s_{m+1})f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}\Big)(x).$$

Так как в результате суммирования будут перебраны все возможные индексации для отображений $f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}(x)$, то мы можем объединить все суммирования в одно, вынеся за скобки элемент (x). Получим выражение

$$\delta(\delta f(x))=\sum\Big((\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_{m-1})(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)+$$

$$(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)(s_0+s_1+\ldots+s_m)+(s_0+s_1+\ldots+s_m)(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)+$$

$$+(s_0+s_1+\ldots+s_m)(s_0+s_1+\ldots+s_{m-1})\Big)f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}(x). \tag{3}$$

Рассмотрим выражение в скобках:

$$\sum(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_{m-1})(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)+$$

$$+(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)(s_0+s_1+\ldots+s_m)+$$

$$+(s_0+s_1+\ldots+s_m)(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)+(s_0+s_1+\ldots+s_m)(s_0+s_1+\ldots+s_{m-1}).$$

Раскрывая скобки, получаем следующие суммы:

$$\sum\partial_i\partial_j+\sum\partial_i s_j+\sum s_i\partial_j+\sum s_i s_j, \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем наборам пар индексов, меняющихся в соответствующих пределах. Рассмотрим первую сумму. В ней будет четное число слагаемых. Так, первый индекс меняется от нуля до m, второй – от нуля до $(m-1)$. Для каждой пары найдется выражение, соответствующее ей по соотношениям (i) для симплициальных граней из формулы (1). Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\sum\partial_i\partial_j=0.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для последнего слагаемого в формуле (4), касающегося симплициальных вырождений. В нем также будет четное число слагаемых, так как первый индекс меняется от нуля до m, второй – от нуля до $(m+1)$. Используя соотношения (ii) для симплициальных соотношений из формулы (1), получаем

$$\sum s_i s_j=0.$$

Рассматривая два последних слагаемых, мы получим, что число слагаемых в них одинаково, причем слагаемых, которых по соотношениям (iii), связывающим симплициальные грани и вырождения в формуле (1), равных тождественному отображению, будет также четное число. Таким образом, учитывая, что все доказательство мы проводим над полем характеристики 2, получаем

$$\sum\partial_i s_j+\sum s_i\partial_j=0.$$

Подставляя все полученные условия в формулу (3), получим

$$\delta(\delta f(x)) = 0,$$

что и требовалось показать.

Определение 5. Множество $CS^*(X)$ из определения 3 вместе с отображением δ из определения 4 будем называть комплексом Хохшильда для симплициального множества.

Термин «комплекс Хохшильда» употребляется в данном случае по аналогии с комплексом Хохшильда для алгебр или модулей. Смысл аналогии заключается в использовании гомологий данного комплекса для описания возможности продолжения симплициального множества до гомотопически устойчивого аналога. Хотя структура комплекса Хохшильда значительно отличается от такого рода комплексов в случае алгебр и модулей над ними, однако это различие обусловливается отличием в структуре симплициального множества и дифференциальных алгебр и модулей над алгебрами.

2. Описание дополнительной операции на комплексе Хохшильда для симплициальных множеств и ее связь с действием дифференциала

Проводя аналогии с ранее построенными комплексами Хохшильда в [4, 5], введем на $CS^*(X)$ вспомогательную операцию, которая будет затем использована для создания теории продолжений. Для этого рассмотрим сначала упорядоченный набор натуральных чисел $i_1,...,i_k$, в которой каждый индекс также принадлежит множеству натуральных чисел.

Определение 6. Будем обозначать $t(i_j)$ для числа i_j, входящего в $i_1,...,i_k$, если $i_{r_1} < i_j,...,i_{r_t} < i_j$ и $r_1 > j,...,r_t > j$. Другими словами, t – количество чисел $i_{r_1} < i_s$, стоящих правее i_s. Также можно сказать, что $t(i_j)$ – число инверсий в подстановке $(i_1,...,i_k)$, соответствующих элементу i_j.

Определение 7. Будем обозначать $\tilde{i}_j$ для числа i_j, входящего в $i_1,...,i_k$, если $\tilde{i}_j = i_j - t$, где t вычисляется согласно определению 6.

Определение 8. Будем обозначать $\hat{i}_j$ для числа i_j, входящего в $i_1,...,i_k$, если $\hat{i}_j = i_j + t$, где t вычисляется согласно определению 6.

Определение 9. Пусть $f \in CS^*(X)$. Определим операцию $\nabla : CS^*(X) \to CS^*(X)$ по следующему правилу:

$$\nabla f = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{I_\sigma} r_{\tilde{\sigma}(i_1),..,\tilde{\sigma}(i_t)} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}),..,\tilde{\sigma}(i_n)} = 0, \qquad (5)$$

где суммирование идет в первом случае по всем возможным перестановкам из симметрической группы S_k, а во втором – по множеству I_σ всех разбиений набора $(\tilde{\sigma}(i_1),\tilde{\sigma}(i_2),...,\tilde{\sigma}(i_n))$ или $(\hat{\sigma}(i_1),\hat{\sigma}(i_2),...,\hat{\sigma}(i_n))$ на два строго упорядоченных блока $(\tilde{\sigma}(i_1),...,\tilde{\sigma}(i_k))$ и $(\tilde{\sigma}(i_{k+1}),...,\tilde{\sigma}(i_t))$ или $((\hat{\sigma}(i_1),...,\hat{\sigma}(i_k))$ и $(\hat{\sigma}(i_{k+1}),...,\hat{\sigma}(i_t)))$, т.е. блоки, в которых выполняется условие $\tilde{\sigma}(i_1) <$

$< \tilde{\sigma}(i_2) < \ldots < \tilde{\sigma}(i_k)$ и $\tilde{\sigma}(i_{k+1}) < \tilde{\sigma}(i_{k+2}) < \ldots < \tilde{\sigma}(i_n)$ (или $\hat{\sigma}(i_1) < \hat{\sigma}(i_2) < \ldots$ $\ldots < \hat{\sigma}(i_k)$ и $\hat{\sigma}(i_{k+1}) < \hat{\sigma}(i_{k+2}) < \ldots < \hat{\sigma}(i_n)$); символ $\tilde{\sigma}(i_1)$ рассматривается в смысле определения 3; символ $\hat{\sigma}(i_1)$ рассматривается в смысле определения 5.

Символ $r_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)}$ будет иметь в данной формуле различное значение в зависимости от значений входящих в него индексов, а именно:

$$r_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)} = \begin{cases} f_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)}, & \text{если } \sigma(s_q) = i_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k, \\ f_{\hat{\sigma}(i_1),\ldots,\hat{\sigma}(i_t)}, & \text{если } \sigma(s_q) = j_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k, \\ f_{\tilde{\sigma}(s_1),\ldots,\tilde{\sigma}(s_t)}^{\tilde{\sigma}(p_1),\ldots,\tilde{\sigma}(p_t)}, & \begin{array}{l}\text{если } \sigma(s_q) = i_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k, \\ \sigma(p_q) = j_k \text{ для некоторых } q \text{ и } k.\end{array} \end{cases}$$

Определим связь построенного отображения ∇ с дифференциалом δ в комплексе Хохшильда для симплициальных множеств $CS^*(X)$. Эта связь может быть сформулирована в следующем утверждении.

Теорема 2. Пусть $CS^*(X)$ комплекс Хохшильда для симплициальных множеств с дифференциалом δ. Тогда справедлива следующая формула:

$$\delta\nabla f = \nabla\delta f\,, \tag{6}$$

т.е. отображение ∇ из определения 9 является цепным в комплексе Хохшильда для симплициальных множеств.

Доказательство. Применяя к левой части доказываемого равенства определение отображения ∇, получаем

$$\delta\nabla f = \delta \sum_{\sigma\in S_k} \sum_{I_\sigma} r_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}),\ldots,\tilde{\sigma}(i_n)}\,.$$

Применяя определение дифференциала в комплексе Хохшильда, получим

$$\delta\nabla f = \sum_{\sigma\in S_k} \sum_{I_\sigma} \delta r_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)} r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}),\ldots,\tilde{\sigma}(i_n)}\,.$$

Учитывая определение символов $r_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)}$ из определения (9), мы можем применить определение дифференциала к каждому из $r_{\tilde{\sigma}(i_1),\ldots,\tilde{\sigma}(i_t)}$. Получим

$$\delta\nabla f = \sum((\partial_0 + \partial_1 + \ldots + \partial_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k} +$$

$$+(s_0 + s_1 + \ldots + s_m) f_{i_1,i_2,\ldots,i_t}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}) r_{\tilde{\sigma}(i_{t+1}),\ldots,\tilde{\sigma}(i_n)}\,.$$

Суммирование в данной формуле идет по всем возможным разбиениям на блоки, удовлетворяющим условиям определения (9), а также по всем симплициальным граням и вырождениям, участвующим в определении (4) дифференциала в комплексе Хохшильда.

Учитывая индексы суммирования, мы можем записать последнюю формулу в виде

$$\delta\nabla f=\sum(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)f^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_t}r_{\tilde\sigma(i_{t+1}),\ldots,\tilde\sigma(i_n)}+$$

$$+\sum\ (s_0+s_1+\ldots+s_m)f^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_t})r_{\tilde\sigma(i_{t+1}),\ldots,\tilde\sigma(i_n)}\,. \qquad (7)$$

Теперь рассмотрим правую часть равенства (6). Применяя к нему определение 12, получаем

$$\nabla\delta f=\nabla\Big(\sum(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)f^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_t}(x)+(s_0+s_1+\ldots+s_m)f^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_t}(x)\Big).$$

Так как в каждом слагаемом стоят элементы из $CS^*(X)$, то к ним можно применить определение (9) отображения ∇. При этом разбивка каждого индексированного отображения может быть проведена только для второго сомножителя, поскольку первый разбиению не поддается. Поэтому получаем выражение

$$\nabla\delta f=\sum(\partial_0+\partial_1+\ldots+\partial_m)r^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_t}r_{\tilde\sigma(i_{t+1}),\ldots,\tilde\sigma(i_n)}+$$

$$+\sum\ (s_0+s_1+\ldots+s_m)r^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_t})r_{\tilde\sigma(i_{t+1}),\ldots,\tilde\sigma(i_n)},$$

которое отличается от выражения (7) только обозначениями и порядком суммирования. Поскольку суммирование в обоих случаях идет по всем возможным разбиениям, то оба выражения будут идентичными. Приведенные соображения доказывают справедливость формулы (6), а вместе с тем и всей теоремы.

Заключение

В рамках данной статьи автором было рассмотрено построение комплекса Хохшильда для симплициального объекта. Доказана теорема о корректности введенного обозначения для отображения δ. Введена дополнительная операция на комплексе Хохшильда, которая является цепным отображением. Ее введение позволит связать построенный комплекс Хохшильда с продолжениями симплициальных объектов посредством аппарата скрещивающих коцепей и гомологий, что является целью дальнейших исследований.

Список литературы

1. **Кадеишвили, Т. В.** К теории гомологий расслоенных пространств / Т. В. Кадеишвили // Успехи математических наук. – 1980. – Т. 35, № 3 (213). – С. 183–188.
2. **Ладошкин, М. В.** Построение аналога симплициальных вырождений в A_∞-случае / М. В. Ладошкин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 80–89.
3. **Смирнов, В. А.** A_∞-симплициальные объекты и A_∞-топологические группы / В. А. Смирнов // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, № 6. – С. 913–919.
4. **Ладошкин, М. В.** A_∞-модули над A_∞-алгебрами и когомологии Хохшильда для модулей над алгебрами / М. В. Ладошкин // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, № 5. –С. 717–728.

5. **Ладошкин, М. В.** Структура A_∞-модуля над алгеброй многочленов в кольцах Стенли – Райснера / М. В. Ладошкин // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 2. – С. 224–231
6. **May, J. P.** Simplicial objects in algebraic topology / J. P. May. – Van Nostred, Math. Studies. – 1967. – Vol. 11. – 162 p.

References

1. Kadeishvili T. V. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Progress of mathematical sciences]. 1980, vol. 35, no. 3 (213), pp. 183–188.
2. Ladoshkin M. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 2 (18), pp. 80–89.
3. Smirnov V. A. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1999, vol. 66, no. 6, pp. 913–919.
4. Ladoshkin M. V. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2006, vol. 79, no. 5, pp. 717–728.
5. Ladoshkin M. V. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2007, vol. 82, no. 2, pp. 224–231
6. May J. P. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostred, Math. Studies. 1967, vol. 11, 162 p.

Ладошкин Михаил Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и методики обучения математике, Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск, ул. Студенческая, 11а)

Ladoshkin Mikhail Vladimirovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and mathematics teaching technique, Mordovia State Pedagogical Institute named after M. E. Evsevyev (11a Studencheskaya street, Saransk, Russia)

E-mail: michldosh@gmail.com

УДК 512.662.1517.977

Ладошкин, М. В.

Дополнительные операции на комплексе Хохшильда для симплициального множества / М. В. Ладошкин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 20–28.